

Beiträge zur Theorie der kompakten komplexen
Mannigfaltigkeiten mit holomorphen Vektorfeldern

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
Christoph Gellhaus
aus
Bochum-Langendreer

Bochum 1988

Datum der mündlichen Prüfung: 14.7.1988



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1: Äquivariante Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$	
1. Meromorphe Funktionen auf fast-homogenen Mannigfaltigkeiten	7
2. Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$	11
3. Vorbereitende Lemmata und Beispiele	13
4. Nilpotente Gruppenkompaktifizierungen	18
5. Auflösbare Gruppenkompaktifizierungen	24
6. Äquivariante Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$ sind Moisëzon	27
Kapitel 2: Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$ mit semidefinitem antikanonischem Bündel	
7. Kompaktifizierungen X des $\mathbb{C}^n$ mit $c_1(X) > 0$	29
8. Eine lokale Einbettung	32
Kapitel 3: Komplexe Flächen mit Vektorfeldern	
9. Klassifikation komplexer Flächen mit Vektorfeldern	39
Literatur	57

Einleitung

Die durch E. Cartan eingeführten hermitesch symmetrischen Räume spielen eine wichtige Rolle in der komplexen Differentialgeometrie. Die Gruppe der holomorphen Isometrien wirkt transitiv auf diesen Räumen, und die hermitsche Metrik ist Kählersch. Beispiele für solche Räume sind Quotienten des $\mathbb{C}^n$ nach diskreten Untergruppen, beschränkte symmetrische Gebiete im $\mathbb{C}^n$ und homogene, symmetrische, projektiv-rationale Mannigfaltigkeiten.

Die komplex symmetrischen Räume im Sinne von A. Borel [B] sind dagegen nur fast-homogen unter der Zusammenhangskomponente ihrer Automorphismengruppe.

Dabei heißt eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten X *fast-homogen*, wenn eine abgeschlossene komplexe Untergruppe G der Gruppe der holomorphen Automorphismen $\text{Aut}_{\mathcal{O}}(X)$ eine offene Bahn $\Omega := G/H$ in X hat. Somit ist Ω eine dichte, offene und zusammenhängende Untermanigfaltigkeit von X , so daß das Komplement $E := X \setminus \Omega$ eine analytische Teilmenge von X ist.

Auf einer fast-homogenen Mannigfaltigkeit X erzeugen die holomorphen Vektorfelder in mindestens einem Punkt $p \in X$ den holomorphen Tangentialraum $T_p^{1,0} X$.

Für die Kodaira-Dimension einer fast-homogenen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X gilt: $\text{Kod}(X) = -\infty$ (bzw. 0 für parallelisierbares X).

Eine vollständige Klassifikation fast-homogener Mannigfaltigkeiten X ist weitgehend aussichtslos, sogar im Fall der komplex symmetrischen Räume

im Sinne von A. Borel. Unter zusätzlichen Annahmen, d.h. durch Bedingungen an die Dimension von X , an die exzeptionelle analytische Menge E oder an Ω , gewinnt man Resultate [H,O 1].

In dieser Arbeit werden dazu zwei Beiträge geliefert. Zuerst beschäftigen wir uns mit fast-homogenen Mannigfaltigkeiten kleiner Dimension.

Die fast-homogenen kompakten komplexen Flächen werden mit Hilfe der Kodaira-Klassifikation [K 1],[K 2] in [Po] klassifiziert. Obwohl für die dreidimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten eine entsprechende Klassifikation nicht existiert, scheint eine Klassifikation dreidimensionaler fast-homogener kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten möglich zu sein.

Ein typisch offenes Problem dabei ist z.B. die Frage nach der Existenz nicht-konstanter meromorpher Funktionen auf äquivarianten Kompaktifizierungen von $Sl_2(\mathbb{C})$.

Wie studiert man nun eine unter G fast-homogene kompakte komplexe dreidimensionale Mannigfaltigkeit X mit exzeptioneller analytischer Menge E ? Man kann über E keinerlei Induktionsvoraussetzungen machen, da E keine fast-homogenen Komponenten zu enthalten braucht. Wenn G trivial auf E wirkt, ist dies eine starke Information über X und G . Im anderen Fall gibt es mindestens eine irreduzible Komponente von E mit nicht-trivialer G -Wirkung, d.h. in E gibt es kompakte komplexe Flächen mit holomorphen Vektorfeldern.

Daß man für fast-homogene Mannigfaltigkeiten X aus Bedingungen an E Rückschlüsse ziehen kann, wird im Kurvensatz [H,O 1] und im Kegelsatz [H,O 3] deutlich. In den beiden Arbeiten werden fast-homogene Mannigfaltigkeiten X mit $\dim_{\mathbb{C}} E \leq 1$ klassifiziert.

Wir liefern einen Beitrag zum Studium der fast-homogenen kompakten komplexen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, indem wir die zweidimensionalen Randkomponenten studieren. Dies geschieht unabhängig vom fast-homogenen Standpunkt:

In Kapitel 3 dieser Arbeit betrachten wir zweidimensionale zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, kurz komplexe Flächen, mit holomorphen Vektorfeldern. Die Schwierigkeiten bei der Klassifikation liegen in Klasse VII_0 .

Wir klassifizieren in Satz 9.1. minimale Flächen X , die ein holomorphes Vektorfeld Θ besitzen, bis auf Flächen in Klasse VII_0 , die ein Vektorfeld Θ mit Nullstellen besitzen. Unter einer zusätzlichen Bedingung können wir eine feinere Klassifikation vornehmen.

Die minimalen Flächen mit Vektorfeldern mit Nullstellen, die von einer holomorphen C^* -Wirkung induziert werden, klassifizieren wir in Satz 9.2.: Solche Flächen sind Kompaktifizierungen von Geradenbündeln über kompakten Riemannschen Flächen, fast-homogene Hopf-Flächen und $P_2(\mathbb{C})$.

Unser zweiter Beitrag befaßt sich mit der Frage nach der Existenz einer maximalen Anzahl analytisch = algebraisch unabhängiger meromorpher Funktionen auf fast-homogenen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten.

Eine Mannigfaltigkeit X der maximalen algebraischen Dimension $a(X) = \dim_{\mathbb{C}} X$ heißt Moïsezon-Mannigfaltigkeit.

Allgemeine Betrachtungen zum Studium meromorpher Funktionen auf fast-homogenen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten (vgl. § 1) legen das Studium äquivarianter Gruppenkompaktifizierungen nahe. Dabei

beschäftigen wir uns mit dem auflösbaren Fall. Dies formulieren wir mit Bedingungen an die offene Bahn $\Omega = G/H$ in einer fast-homogenen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X :

Wenn alle Homotopiegruppen der offenen Bahn verschwinden, d.h. wenn Ω "asphärisch" ist, ist die offene Bahn schon biholomorph zu $\mathbb{C}^n$. Dabei können G und H als zusammenhängend angenommen werden, d.h. mit der langen exakten Homotopiesequenz folgt, daß G einfach-zusammenhängend ist. Daher wirkt das Radikal R von G auf Ω schon transitiv, und $R \cap H$ ist zusammenhängend [H,O 2]:

$$G/H \cong R/(R \cap H) \cong \mathbb{C}^n.$$

Solche X nennen wir *äquivariante Kompaktifizierung von $\mathbb{C}^n$* . Was kann man über die Struktur von X aussagen?

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß G wirklich eine komplexe Liegruppe sein muß, da die Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ auch asphärisch ist.

Wir erwähnen jetzt die bekannten Resultate für eine äquivariante Kompaktifizierung X des $\mathbb{C}^n$:

Wenn X zusätzlich eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist, folgt mit $b_1(X) = 0$, daß X projektiv-algebraisch ist [O 2]. Da schon das auflösbare Radikal R auf der offenen Bahn Ω transitiv wirkt, kann man mit Methoden der algebraischen Gruppen zeigen, daß X rational ist, d.h. birational zu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ äquivalent.

Wenn X schon unter einer größeren komplexen Liegruppe homogen ist, kann man Hilfe der Tits-Faserung zeigen, daß X projektiv-rational ist [H,O 2].

Falls der Rand $X \setminus \Omega$ eine weitere Bahn der Gruppe G ist, ist X schon zu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ biholomorph [H,O 2].

In dieser Arbeit wird in Kapitel 1 der folgende Satz bewiesen:

Satz 6.1.:

Es sei G eine komplexe Liegruppe, die auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X fast-homogen wirkt, so daß die offene Bahn G/H asphärisch ist.

Dann ist X eine rationale Moisëzon-Mannigfaltigkeit, also bimeromorph zu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ äquivalent. Die offene Bahn $G/H \cong \mathbb{C}^n$ ist dann affin-algebraisch in X , und X kann mit Hilfe eines G -stabilen holomorphen Geradenbündels G -äquivariant zu einer Kähler-Mannigfaltigkeit modifiziert werden.

Somit lassen sich in Satz 7.1. äquivariante Kompaktifizierungen X des $\mathbb{C}^3$ mit $b_2(X) = 1$ klassifizieren.

In Kapitel 2 wird dann untersucht, unter welchen Bedingungen an eine äquivariante Kompaktifizierung X des $\mathbb{C}^n$ eine Potenz des antikanonischen Bündels auf X für die äquivariante Modifikation aus Satz 6.1. genommen werden kann. In Satz 8.5. wird gezeigt: Falls die erste Chernklasse von X im differentialgeometrischen Sinne semidefinit ist und falls für die Iitaka-Dimension des antikanonischen Bündels auf X :

$$\kappa(X, K_X^{-1}) = n.$$

gilt, dann liefert eine Potenz des antikanonischen Bündels eine G -äquivalente meromorphe Abbildung

$$\varphi_{K_X^{-k}} : X \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}),$$

die die offene Bahn $\Omega \cong G/H \cong \mathbb{C}^n$ holomorph einbettet.

Bemerkungen:

Wenn der Randdivisor $X \setminus \Omega$ irreduzibel ist, dann ist die Bedingung $c_1(X) \geq 0$ auch notwendig dafür, daß X selbst projektiv-algebraisch ist. Unabhängig von $c_1(X) \geq 0$ gilt dann für die Iitaka-Dimension des antikanonischen Bündels auf X :

$$\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) = n.$$

Wenn der Randdivisor eine Bahn ist oder wenn X schon unter einer größeren Gruppe homogen ist, dann sind die Bedingungen an das antikanonische Bündel auf X aus Satz 8.5. erfüllt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Alan T. Huckleberry für die dauernde Förderung meines Studiums und für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Fertigstellung er durch viele Diskussionen und Ratschläge unterstützt hat.

Besonderer Dank gilt auch Herrn Dr. Peter Heinzner, dessen Geduld und Rat mir bei der Diskussion mathematischer Fragestellungen eine wertvolle Hilfe bedeuten.

Kapitel 1: Äquivariante Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$

1. Meromorphe Funktionen auf fast-homogenen Mannigfaltigkeiten:

Es sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die bezüglich einer zusammenhängenden komplexen Liegruppe G fast-homogen ist.

Wie studiert man nun meromorphe Funktionen auf X ?

Die Existenz einer äquivalenten algebraischen Reduktion von X wäre dabei von Vorteil. Da dieses Problem noch nicht vollständig gelöst ist, müssen wir hier anders ansetzen.

Die Hauptmethode dabei ist die Tatsache, daß Einschränkungen transversaler Divisoren auf allgemeine Fasern einer algebraischen Reduktion dort keine meromorphen Funktionen liefern [U].

Es sei $\tilde{X}$ eine algebraische Reduktion von X , so daß die Abbildung p holomorph ist:

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{X} & \text{mit } a(\tilde{X}) = a(X) \\
 & \nearrow & \\
 X & \downarrow p & \\
 & \searrow & \\
 & V & \text{mit } a(V) = a(\tilde{X}) = a(X)
 \end{array}$$

Es sei $x_0 \in X$ ein allgemeiner Punkt in der offenen Bahn $\Omega := G/H$ mit

$H = \{g \in G \mid g(x_0) = x_0\}$. Es sei

$$A(x_0) := \bigcap \{D \subset X \mid D \text{ ist Hyperfläche in } X, \text{ die } x_0 \text{ enthält}\}.$$

Dann bezeichne F die x_0 enthaltende irreduzible Komponente von $A(x_0)$.

Dann ist X zu $\tilde{X}$ bimeromorph äquivalent und die allgemeine Faser $\tilde{F}$ von p ist eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, die in X als J -Kompaktifizierung F realisiert werden kann, mit

$$J := \{g \in G \mid g(F) = F\}$$

In der Tat gilt für Punkte $x, y \in F \cap G/H$ mit $g(x) = y$, daß g die analytische Menge F stabilisiert. Somit gilt $H < J$ und J wirkt fast-transitiv auf F .

Der Schnitt von F mit G/H liefert durch Translation mit Automorphismen aus G eine Zerlegung von G/H , die durch ein G -äquivariantes holomorphes Faserbündel $\pi : G/H \rightarrow G/J$ gegeben wird.

Die Universalität dieser Faserung nutzen wir in einer speziellen Situation: Die $\mathcal{G}$ -antikanonische Faserung [H,O 1] der offenen Bahn G/H ist meromorph und G -äquivariant fortsetzbar; denn die Abbildung wird durch die Schnitte im antikanonischen Bündel auf X gegeben, die durch die Liealgebra $\mathcal{G}$ induziert werden:

$$\begin{array}{ccccc} G/H & \longrightarrow & G/N & \subset & \mathbb{P}_m(\mathbb{C}) \text{ mit } N := N_G(H^0) \\ \cap & & \cap & & \\ X & \longrightarrow & Y & \subset & \mathbb{P}_m(\mathbb{C}). \end{array}$$

Da die Hyperflächen in G/N dort die Punkte trennen, erhält man auf der offenen Bahn das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & Y \\
 \cup & & \cup \\
 G/H & \longrightarrow & G/N \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & G/J &
 \end{array}$$

Dann ist F eine J - äquivalente Kompaktifizierung, so daß J/H parallelisierbar ist, da $J < N$ gilt: $J/H = (J/H^0)/(H/H^0) = L/\Gamma$ wobei L eine komplexe Liegruppe mit diskreter Untergruppe Γ ist.

Nun beginnen wir mit dem einfachsten Fall: $H = H^0$, d.h. F ist eine äquivalente Gruppenkompaktifizierung von J/H . Dabei ist zu erwähnen, daß äquivalente Kompaktifizierungen von L/Γ mit diskretem Γ schon im dreidimensionalen Fall für "fast keine" Γ existieren [M].

Da wir uns für das Studium von F auf äquivalente Gruppenkompaktifizierungen beschränken, stellt sich nun die Frage, für welche Gruppen G man auf F genügend viele meromorphe Funktionen konstruieren kann.

Weil eine $Sl_3(\mathbb{C})$ - äquivalente Gruppenkompaktifizierung existiert, die nicht Moisëzon ist, betrachten wir komplex auflösbare Gruppen, die bei den äquivalenten Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$ auftauchen.

Nun beweisen wir für die nicht notwendigerweise glatte J - äquivalente Kompaktifizierung F :

1.1. Lemma:

Es sei $\tau : \hat{F} \rightarrow F$ eine J -äquivalente Desingularisierung [Hi] von F mit Randdivisor $\hat{E} := \tau^*(E|_F)$, wobei E der Randdivisor in X ist.

Dann gilt: $\mathcal{K}(\hat{F}, \hat{E}) \leq 0$.



Beweis:

Es sei nun $p : \tilde{X} \rightarrow V$ eine algebraische Reduktion von X , so daß die Abbildung p holomorph ist. Dann ist $\Psi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation, die eingeschränkt auf eine generische glatte zusammenhängende Faser $\tilde{F}$ von p eine eigentliche Modifikation auf eine J -äquivalente Kompaktifizierung F liefert: $\psi := (\Psi|_{\tilde{F}}) : \tilde{F} \rightarrow F$.

Nun ist $\hat{F}$ eine glatte J -äquivalente Gruppenkompaktifizierung mit Randdivisor $\hat{E} = \tau^*(E|_F)$. Aber $\tilde{E} := \psi^*(E|_F) = (\Psi^*(E))|_{\tilde{F}}$. Somit folgt mit Theorem 12.1. aus [U]: $\mathcal{K}(\tilde{F}, \tilde{E}) \leq 0$.

Nun ergeben die eigentlichen Modifikationen $\tau : \hat{F} \rightarrow F$ und $\psi : \tilde{F} \rightarrow F$ eine bimeromorphe Abbildung $\sigma : \hat{F} \dashrightarrow \tilde{F}$. Es sei Z der Graph dieser bimeromorphen Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten $\hat{F}$ und $\tilde{F}$, so daß σ durch folgende eigentliche Modifikationen

$$\hat{\tau} : Z \rightarrow \hat{F} \quad \text{und} \quad \tilde{\psi} : Z \rightarrow \tilde{F}$$

gegeben wird. Es gilt somit: $\tau \circ \hat{\tau} = \psi \circ \tilde{\psi}$, d.h.

$$\hat{\tau}^*(\hat{E}) = \hat{\tau}^*(\tau^*(E|_F)) = \tilde{\psi}^*(\psi^*(E|_F)) = \tilde{\psi}^*(\tilde{E}).$$

Nun folgt mit Lemma 5.3. aus [U]:

$$\mathcal{K}(\hat{F}, \hat{E}) = \mathcal{K}(Z, \hat{\tau}^*(\hat{E})) = \mathcal{K}(Z, \tilde{\psi}^*(\tilde{E})) = \mathcal{K}(\tilde{F}, \tilde{E}) \leq 0.$$

□

2. Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$:

In diesem Abschnitt werden wir Eigenschaften allgemeiner Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$ untersuchen, d.h. wir betrachten kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten X , die $\mathbb{C}^n$ als Zariski-offene Teilmenge enthalten.

2.1. Lemma:

Es sei X eine Kompaktifizierung von $\mathbb{C}^n$ und E sei die analytische Teilmenge am Rand von X , d.h. $E := X \setminus \mathbb{C}^n$. Dann gilt $[R, V]$:

- a) E ist von reiner Kodimension 1 in X , d.h. E ist ein Divisor; denn ansonsten könnte man die Polynome auf $\mathbb{C}^n$ als holomorphe Funktionen über die niederdimensionaleren Komponenten von E fortsetzen.
- b) $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong H_1(X, \mathbb{Z}) \cong 0$, $\pi_1(X) \cong 0$.
- c) E ist genau dann irreduzibel, wenn $b_2(X) = 1$ gilt.

Für $b_2(X) = 1$, d.h. für irreduziblen Randdivisor E gilt:

- d) $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt von $c_1(L)$ mit $L := \mathcal{O}_X(E)$ und $\text{Pic}^0(X) \cong H^1(X, \mathcal{O})$.

Wenn X zusätzlich Moisëzon ist, gilt Hodge-Zerlegung auf X und daher:

- e) $H^1(X, \mathcal{O}) \cong H^2(X, \mathcal{O}) \cong 0$.
- f) $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$, von L erzeugt.

Außerdem gilt für die Kodaira-Dimension von X :

2.2. Satz [K 3]:

Es sei X eine Kompaktifizierung des $\mathbb{C}^n$. Dann gilt:

$$\text{Kod}(X) = -\infty.$$

Wir werden die Methoden von Kodaira zum Beweis dieses Satzes benutzen, um für bestimmte Situationen $H^q(X, \mathcal{O}) = 0$ für $q \geq 1$ zu beweisen (vgl. Kapitel 2).

2.3. Lemma:

Es sei X eine Kompaktifizierung von $\mathbb{C}^n$ und ω sei eine geschlossene meromorphe 1-Form mit Polstellendivisor E auf X .

Dann existiert eine meromorphe Funktion Φ auf X mit $d\Phi = \omega$.

Beweis:

Wähle z.B. $z_0 := 0 \in \mathbb{C}^n$ und wähle einen differenzierbaren Weg γ von z_0 nach $z \in X$ und setze:

$$\Phi(z) := \int_{\gamma} \omega .$$

Dies liefert erst einmal eine wohldefinierte holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}^n$, da X und $\mathbb{C}^n$ einfach-zusammenhängend sind. Nun betrachte einen glatten Punkt z im Rand E und einen Weg von z_0 nach z , der außer in z ganz in $\mathbb{C}^n$ liegt. Dort ist die 1-Form ω ja holomorph.

Man rechne in lokalen Koordinaten:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{g_i} dz_i \quad \text{und} \quad E_{\text{red}} = \{z_1 = 0\}$$

und mache die Laurententwicklung für die f_i/g_i .

□

3. Vorbereitende Lemmata und Beispiele:

Nun untersuchen wir äquivariante Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$.

Wir können im Folgenden immer annehmen, daß G eine zusammenhängende einfach-zusammenhängende komplex auflösbare Liegruppe ist. Da H zusammenhängend ist, folgt mit langer exakter Homotopiesequenz, daß auch H einfach-zusammenhängend ist. Dann gilt:

$$G \cong \mathbb{C}^{n+k}, \quad H \cong \mathbb{C}^k \quad \text{und} \quad G/H \cong \mathbb{C}^n$$

als komplexe Mannigfaltigkeiten.

Zuerst untersuchen wir G -äquivariante *Gruppenkompaktifizierungen* von $\mathbb{C}^n$, d.h. $H = \{e\}$. Dann existiert eine Basis

$$\Theta_1, \dots, \Theta_n \in H^0(G, T^{1,0}G)$$

der rechts-invarianten Vektorfelder auf G , die sich ja wegen der Links-Wirkung von G auf X als holomorphe Vektorfelder auf X fortsetzen lassen, so daß die dazu dualen rechts-invarianten holomorphen 1-Formen

$$\omega_1, \dots, \omega_n \in H^0(G, \Omega^1)$$

für auflösbare Gruppenstruktur den folgenden Bedingungen [N 1] genügen:

$$(1) \quad d\omega_1 = \dots = d\omega_r = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq r \leq n$$

$$(2) \quad d\omega_i = \sum_{1 \leq j < k \leq i} c_{jk}^i \cdot \omega_j \wedge \omega_k \quad \text{für} \quad r+1 \leq i \leq n.$$

Wenn G eine nilpotente Gruppenstruktur besitzt, gilt entsprechend:

$$(1') \quad d\omega_1 = \dots = d\omega_r = 0 \quad \text{für} \quad 2 \leq r \leq n$$

$$(2') \quad d\omega_i = \sum_{1 \leq j < k < i} c_{jk}^i \cdot \omega_j \wedge \omega_k \quad \text{für} \quad r+1 \leq i \leq n.$$

Alles gilt für geeignete Strukturkonstanten $c_{jk}^i \in \mathbb{C}$.

3.1. Lemma:

Es sei X eine auflösbare G -äquivalente Gruppenkompaktifizifizierung, dann sind auch die rechts-invarianten holomorphen 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_n$ als meromorphe 1-Formen auf X fortsetzbar.

(Es wird im Folgenden in der Notation nicht zwischen den Θ bzw. den ω und deren Fortsetzungen unterschieden.)

Beweis:

Es sei Θ ein beliebiges holomorphes Vektorfeld auf einer Koordinatenkarte $U \subset X$, d.h. ein holomorpher Schnitt $\Theta \in H^0(U, T^{1,0}U)$. Betrachte die

$$\Theta_1, \dots, \Theta_n \in H^0(X, T^{1,1}X).$$

Dann definiert

$$\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n \in H^0(X, K_X^{-1})$$

einen holomorphen Schnitt im antikanonischen Bündel auf X , der auf der offenen Bahn G nicht verschwindet, aber in einem Punkt aus E . Somit definiert

$$(\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n)^{-1}$$

einen meromorphen Schnitt im kanonischen Bündel auf X .

Definiere nun die Fortsetzung der ω auf einem $\Theta \in H^0(U, T^{1,0}U)$ wie folgt

$$\omega_i(\Theta) := (\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_{i-1} \wedge \Theta \wedge \Theta_{i+1} \wedge \dots \wedge \Theta_n) \cdot (\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n)^{-1}.$$

Dies liefert als Produkt eines meromorphen Schnittes im kanonischen Bündel mit einem holomorphen Schnitt im antikanonischen Bündel eine meromorphe Funktion auf U , die eingeschränkt auf $U \cap G$ natürlich holomorph ist.

Auf G gilt natürlich:

$$\omega_i(\Theta_j) = \delta_{ij}.$$

□

3.2. Beispiel:

Wir werden am Beispiel der dreidimensionalen Heisenberg-Gruppe sehen, wie diese meromorphen 1-Formen drei meromorphe Funktionen liefern. Dabei interessiert uns nur die Darstellung der Differentiale der ω auf der Gruppe G :

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0 \quad \text{und} \quad d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Als geschlossene meromorphe 1-Formen lassen sich ω_1 und ω_2 sofort nach Lemma 2.3. auf jeder G -äquivalenten Gruppenkompaktifizierung X integrieren, und man erhält meromorphe Funktionen Φ_1 und Φ_2 auf X mit

$$d\Phi_1 = \omega_1 \quad \text{und} \quad d\Phi_2 = \omega_2$$

Dann definiert auch $\omega_3 + \Phi_1\omega_2$ eine meromorphe 1-Form auf X , die auf der offenen Bahn G holomorph ist. Es gilt aber:

$$d(\omega_3 + \Phi_1\omega_2) = -\omega_1 \wedge \omega_2 + d\Phi_1 \wedge \omega_2 = 0$$

Also ist $\omega_3 + \Phi_1\omega_2$ eine geschlossene meromorphe 1-Form auf X , d.h. es existiert eine meromorphe Funktion Φ_3 auf X mit

$$d\Phi_3 = \omega_3 + \Phi_1\omega_2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \wedge d\Phi_3 &= \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge (\omega_3 + \Phi_1\omega_2) \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0 \quad \text{auf } G. \end{aligned}$$

Wir können also *mit der Hand* drei analytisch = algebraisch unabhängige meromorphe Funktionen auf jeder G -äquivalenten Gruppenkompaktifizierung der dreidimensionalen Heisenberg-Gruppe konstruieren.

3.3. Beispiel:

Bevor wir die Aussage für beliebige Dimension beweisen, illustrieren wir noch die Schwierigkeiten bei höheren Dimensionen. Dabei sei X eine G -äquivalente Gruppenkompaktifizierung von $\mathbb{C}^5$ mit der folgenden nilpotenten Gruppenstruktur:

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 &= 0 & d\Phi_1 &= \omega_1 \\
 d\omega_2 &= 0 & d\Phi_2 &= \omega_2 \\
 d\omega_3 &= -\omega_1 \wedge \omega_2 = -d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 & d\Phi_3 &= \omega_3 + \Phi_1 d\Phi_2 \\
 d\omega_4 &= -2\omega_1 \wedge \omega_3 \\
 &= -2d\Phi_1 \wedge (d\Phi_3 - \Phi_1 d\Phi_2) \\
 &= -2d\Phi_1 \wedge d\Phi_3 + 2\Phi_1 d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 & d\Phi_4 &= \omega_4 + 2\Phi_1 d\Phi_3 - (\Phi_1)^2 d\Phi_2 \\
 d\omega_5 &= -3\omega_1 \wedge \omega_4 - \omega_2 \wedge \omega_3 \\
 &= -3d\Phi_1 \wedge d\Phi_4 + 6\Phi_1 d\Phi_1 \wedge d\Phi_3 \\
 &\quad + 3(\Phi_1)^2 d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 - d\Phi_2 \wedge d\Phi_3
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich am Ende:

$$d\Phi_5 = \omega_5 + 3\Phi_1 d\Phi_4 - 3(\Phi_1)^2 d\Phi_3 - (\Phi_1)^3 d\Phi_2 + \Phi_2 d\Phi_3$$

Diese Gleichungen gelten auf der offenen Bahn G , auf der alle betrachteten Objekte holomorph sind. Die fünf meromorphen Funktionen sind auf X offenbar analytisch unabhängig:

$$d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_5 = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_5 \neq 0;$$

denn insgesamt ergibt sich die folgende Transformation, bei der sich die gesamte Transformationsmatrix aus dem Produkt der einzelnen Transformationsmatrizen in jedem Schritt zusammensetzt:

$$\begin{pmatrix} d\Phi_1 \\ d\Phi_2 \\ d\Phi_3 \\ d\Phi_4 \\ d\Phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\Phi_1)^2 & 2\Phi_1 & 1 & 0 \\ 0 & \Phi_1\Phi_2 - (\Phi_1)^3 & 3(\Phi_1)^2 + \Phi_2 & 3\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{pmatrix}$$

4. Nilpotente Gruppenkompaktifizierungen:

4.1. Proposition:

Es sei X eine *nilpotente* G -äquivalente Gruppenkompaktifizierung von $G \cong \mathbb{C}^n$. Dann ist X Moisëzon und für die Iitaka-Dimension des antikanonischen Bündels auf X gilt:

$$\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) \geq r \geq 2.$$

Wir beweisen dazu folgendes Lemma induktiv:

4.2. Lemma:

Es sei X eine *nilpotente* G -äquivalente Gruppenkompaktifizierung von $G = \mathbb{C}^n$. Es seien $\omega_1, \dots, \omega_n$ meromorphe Fortsetzungen der rechtsinvarianten holomorphen 1-Formen auf X , die auf G den Gleichungen

$$(1) \quad d\omega_1 = \dots = d\omega_r = 0 \quad \text{für} \quad 2 \leq r \leq n$$

$$(2) \quad d\omega_i = \sum_{1 \leq j < k < i} c_{jk}^i \cdot \omega_j \wedge \omega_k \quad \text{für} \quad r+1 \leq i \leq n.$$

genügen. Dann existieren dazu meromorphe Funktionen $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ auf X , die auf G holomorph sind, so daß auf G gilt:

$$(3) \quad \omega_i = d\Phi_i \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq r$$

$$(4) \quad \omega_i = \sum_{j=1}^i F_{ij}(\Phi) \cdot d\Phi_j \quad \text{für} \quad r+1 \leq i \leq n.$$

Dabei ist $F_{ij}(\Phi)$ ein Polynom in $\Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}$ und somit eine meromorphe Funktion auf X ($F_{ii}(\Phi) \equiv 1$).

Beweis:

Wir beweisen dieses Lemma durch vollständige Induktion nach m , wobei der Fall $m = 1$ klar ist. Die Aussage des Lemmas sei für alle $i \leq m-1$ schon bewiesen. Dann gilt:

$$d\omega_m = \sum_{1 \leq j < k < m} c_{jk}^m \cdot \omega_j \wedge \omega_k = \sum_{1 \leq i < j \leq m-1} F_{ij}^*(\Phi) \cdot d\Phi_i \wedge d\Phi_j.$$

Dabei ist $F_{ij}^*(\Phi)$ ein Polynom in $\Phi_1, \dots, \Phi_{m-2}$, und es gilt somit für gewisse G_i mit $\frac{\partial G_i(\Phi)}{\partial \Phi_{m-1}} = F_{i(m-1)}^*(\Phi)$:

$$\begin{aligned}
& d(\omega_m + \sum_{i=1}^{m-1} G_i(\Phi) \cdot d\Phi_i) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq m-1} F_{ij}^*(\Phi) \cdot d\Phi_i \wedge d\Phi_j \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m-1} F_{i(m-1)}^*(\Phi) \cdot d\Phi_i \wedge d\Phi_{m-1} \\
&\quad + (\text{Terme in } d\Phi_i \wedge d\Phi_j, \text{ mit } i, j \leq m-2) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq m-2} F_{ij}^{**}(\Phi) \cdot d\Phi_i \wedge d\Phi_j.
\end{aligned}$$

Dabei ist $F_{ij}^{**}(\Phi)$ ein Polynom in $\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1}$. Aber $F_{ij}^{**}(\Phi)$ hängt gar nicht von Φ_{m-1} ab:

$$\begin{aligned}
0 &= d\left(\sum_{1 \leq i < j \leq m-2} F_{ij}^{**}(\Phi) \cdot d\Phi_i \wedge d\Phi_j\right) = \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq m-2} \left(\frac{\partial F_{ij}^{**}(\Phi)}{\partial \Phi_{m-1}} \cdot d\Phi_{m-1} \wedge d\Phi_i \wedge d\Phi_j + \dots\right)
\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{\partial F_{ij}^{**}(\Phi)}{\partial \Phi_{m-1}} = 0$ und $F_{ij}^{**}(\Phi)$ ist ein Polynom in $\Phi_1, \dots, \Phi_{m-2}$. Jetzt kann man so sukzessive fortfahren. Dann gilt:

$$d(\omega_m + \sum_{i=1}^{m-1} G_{i(m-1)}^*(\Phi) \cdot d\Phi_i) = 0.$$

Integration dieser geschlossenen meromorphen 1-Form auf X liefert eine meromorphe Funktion Φ_m auf X mit:

$$d\Phi_m = \omega_m + \sum_{i=1}^{m-1} G_{i(m-1)}^*(\Phi) \cdot d\Phi_i.$$

und

$$\omega_m = \sum_{j=1}^m F_{mj}(\Phi) \cdot d\Phi_j.$$

Nun ist $F_{mj}(\Phi)$ ein Polynom in $\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1}$ und $F_{mm}(\Phi) \equiv 1$.

□

Beweis von Proposition 4.1.:

Nach Lemma 4.2. existieren also die meromorphen Funktionen $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ auf X , deren Differentiale auf G folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_r \\ \omega_{r+1} \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\Phi_1 \\ \vdots \\ d\Phi_r \\ d\Phi_{r+1} \\ \vdots \\ d\Phi_n \end{pmatrix}$$

Dabei sind die nicht-trivialen Koeffizienten in der i -ten Zeile der Matrix polynomial in $\Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}$. Für die Determinante der Transformationsmatrix A gilt: $\det A = 1$.

Also gilt auf G : $d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_n = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \neq 0$, d.h. die meromorphen Funktionen $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sind auf X analytisch = algebraisch unabhängig. Somit ist X Moisëzon.

Nach Konstruktion der Φ_i ergibt sich, daß $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ direkt aus den geschlossenen meromorphen 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_r$ durch Integration gewonnen werden können. Im antikanonischen Bündel auf X haben wir einen holomorphen Schnitt

$$s_0 := \Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n \in H^0(X, K_X^{-1}).$$

Der Träger des Nullstellendivisors von s_0 ist gleich dem Träger des Randdivisors E der Kompaktifizierung X .

Definiere nun auf X meromorphe Schnitte im antikanonischen Bündel:

$$s_i := \Phi_i \cdot (\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n) = \Phi_i \cdot s_0$$

für $i = 1, \dots, r$. Jetzt braucht nur gezeigt zu werden, daß $s_1, \dots, s_r$ holomorphe Schnitte im antikanonischen Bündel auf X sind. Dann gilt:

$$s_0, s_1, \dots, s_r \in H^0(X, K_X^{-1}) \text{ mit } \Phi_1 = s_1/s_0, \dots, \Phi_r = s_r/s_0.$$

Die Aussage ist klar auf G , da dort alles holomorph ist. Ferner reicht es, die Aussage für alle glatten Punkte des Randdivisors zu zeigen, da der Rest eine analytische Teilmenge mindestens der Kodimension ≥ 2 ist und der meromorphe Schnitt dann schon auf ganz X holomorph ist.

Betrachte nun eine Umgebung eines glatten Punktes des Randdivisors in X , in der Φ_1 die Darstellung f/g mit teilerfremden holomorphen Funktionen f und g hat. Dann gilt:

$$d\Phi_1 = \frac{g \, df - f \, dg}{g^2} = \omega_1.$$

Sei nun $\Theta \in H^0(U, T^{1,0}U)$ ein beliebiges holomorphes Vektorfeld auf einer Koordinatenkarte $U \subset X$. Dann liefert $s_0 \cdot \omega_1(\Theta)$ einen holomorphen Schnitt im antikanonischen Bündel auf U :

$$\begin{aligned}
s_0 \cdot \omega_1(\Theta) &= (\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n) \cdot (\Theta \wedge \Theta_2 \wedge \dots \wedge \Theta_n) \cdot (\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n)^{-1} \\
&= (\Theta \wedge \Theta_2 \wedge \dots \wedge \Theta_n) \in H^0(U, K_U^{-1}).
\end{aligned}$$

Also gilt: $s_0 \cdot \omega_1 \in H^0(X, \Omega^1 \otimes K_X^{-1})$ und somit: $s_1 = s_0 \cdot \Phi_1 \in H^0(X, K_X^{-1})$.

Eine analoge Überlegung für $\Phi_2, \dots, \Phi_r$ liefert die Behauptung.

□

4.3. Resümee:

Es sei X eine *nilpotente* G -äquivalente Gruppenkompaktifizierung von $G = \mathbb{C}^n$. Es seien

$$\Theta_1, \dots, \Theta_n \in H^0(G, T^{1,0}G)$$

eine Basis der rechts-invarianten Vektorfelder auf G . Dann existieren dazu meromorphe Funktionen $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ auf X , die auf G holomorph sind. Somit liefern $d\Phi_1, \dots, d\Phi_n$ geschlossene meromorphe 1-Formen auf X , die auf der Gruppe G als geschlossene holomorphe 1-Formen mit den zugehörigen holomorphen Vektorfeldern

$$\tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_n \in H^0(G, T^{1,0}G)$$

mit

$$d\Phi_i(\tilde{\Theta}_j) = \delta_{ij}$$

und

$$[\tilde{\Theta}_i, \tilde{\Theta}_j] = 0$$

eine abelsche Gruppenstruktur induzieren, so daß die holomorphen Vektorfelder $\tilde{\Theta}_i$ und $\Phi_i \cdot \tilde{\Theta}_j$, d.h. die $\mathbb{C}^n \rtimes Gl_n(\mathbb{C})$ -Vektorfelder als meromorphe Schnitte in $T^{1,0}X$ fortgesetzt werden können.

Somit lassen sich auch die Koordinaten-Hyperebenen in $\mathbb{C}^n$ als Divisoren nach X fortsetzen.

5. Auflösbare Gruppenkompaktifizierungen:

5.1. Beispiel:

Um die Schwierigkeiten im auflösbaren Fall zu verdeutlichen, betrachten wir zuerst ein zweidimensionales Beispiel. (Natürlich ist jede $\mathbb{C}^2$ - Kompaktifizierung unabhängig von der Gruppenwirkung projektiv-algebraisch und rational [K 3].) Betrachte $G \cong \mathbb{C}^2$ und die folgende Wirkung auf $X = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$:

$$(x, y)([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]) := ([z_0 + xz_1 : z_1], [w_0 + yw_1 : e^x w_1]).$$

Dies entspricht der folgenden Darstellung:

$$r(x, y) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$$

Die offene Bahn ist $\mathbb{C}^2$ mit der nicht-abelschen Gruppenstruktur:

$$[\Theta_1, \Theta_2] = \Theta_2$$

Die G' -Bahn ist in X abgeschlossen. In lokalen Koordinaten auf $\mathbb{C}^2$ gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \frac{\partial}{\partial a} - b \frac{\partial}{\partial b} & \omega_1 &= da \\ \Theta_2 &= \frac{\partial}{\partial b} & \omega_2 &= b da + db\end{aligned}$$

Also gilt:

$$d\omega_1 = 0 \quad \text{liefert} \quad \Phi_1 \quad \text{mit} \quad d\Phi_1 = \omega_1.$$

$$d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2$$

Die Projektion $\pi_1 = \Phi_1$ ist eine holomorphe Abbildung auf $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ und eine meromorphe Fortsetzung einer Koordinate a auf X , so daß die Fasern der Abbildung den Abschluß der G' -Bahnen liefern.

Es gilt auf $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}d(e^a \omega_2) &= d(e^a b da + e^a db) = \\ &= e^a db \wedge da + e^a da \wedge db = 0\end{aligned}$$

Hier bekommt man durch das Verfahren aus § 4 keine weiteren geschlossenen 1-Formen mit polynomialen Faktoren in meromorphen Funktionen auf X : Die Form $e^{\Phi_1} \cdot \omega_2$ macht keinen Sinn als meromorphe 1-Form auf X , da Φ_1 nur meromorph ist.

Dennoch gilt:

5.2. Proposition:

Es sei X eine auflösbare G -äquivalente Gruppenkompaktifizierung von $G \cong \mathbb{C}^n$. Dann ist X Moisëzon und für die Iitaka-Dimension des antikanonischen Bündels auf X gilt :

$$\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) \geq r \geq 1.$$

Beweis:

Man hat im auflösbaren Fall mindestens $r \geq 1$ geschlossene meromorphe 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_r$ die r analytisch unabhängige meromorphe Funktionen $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ auf X liefern, d.h. für die algebraische Dimension von X gilt: $a(X) \geq r \geq 1$. Analog zu dem nilpotenten Fall folgt auch:

$$\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) \geq r \geq 1.$$

Es gilt $\{\Phi_1 = \dots = \Phi_r = 0\} \cap G \cong G'$, d.h. für die in Abschnitt 1 betrachtete J -äquivalente Gruppenkompaktifizierung F gilt: J ist eine positiv-dimensionale Untergruppe von G' , d.h. J ist nilpotent, und F ist eine nilpotente Gruppenkompaktifizierung von J .

Nun betrachten wir wie in Lemma 1.1. zu F eine glatte J -äquivalente Gruppenkompaktifizierung $\hat{F}$ mit dem Randdivisor $\hat{E} = \hat{E}_1 + \dots + \hat{E}_m$ (Zerlegung in irreduzible Komponenten). Da die Vektorfelder, die durch die Gruppenwirkung auf $\hat{F}$ induziert werden, auf dem Randdivisor einen dort verschwindenden antikanonischen Schnitt liefern, gilt mit positiven ganzen Zahlen n_i für $i = 1, \dots, m$:

$$K_{\hat{F}}^{-1} = n_1 \cdot \hat{E}_1 + \dots + n_m \cdot \hat{E}_m.$$

Nach Proposition 4.1. gilt dann: $1 \leq \mathcal{K}(\hat{F}, K_{\hat{F}}^{-1})$, d.h. es existiert eine positive ganze Zahl k , so daß für zwei holomorphe Schnitte $s_1, s_0 \in H^0(\hat{F}, K_{\hat{F}}^{-k})$ der Quotient s_1/s_0 eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf $\hat{F}$ liefert.

Es seien $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$ definierende Schnitte für $\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_m$. Für $i = 0, 1$ betrachte man folgende holomorphe Schnitte

$$t_i := s_i \otimes \hat{e}_1^{k \cdot (n_2 + \dots + n_m)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_m^{k \cdot (n_1 + \dots + n_{m-1})}$$

in $H^0(\hat{F}, k \cdot (n_1 + \dots + n_m) \cdot \hat{E})$. Nun liefert auch $t_1/t_0 = s_1/s_0$ eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf $\hat{F}$.

Somit gilt $1 \leq \mathcal{K}(\hat{F}, \hat{E})$ im Widerspruch zu Lemma 1.1.

□

6. Äquivariante Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$ sind Moisëzon:

6.1. Satz:

Es sei G eine komplexe Liegruppe, die auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X fast-homogen wirkt, so daß die offene Bahn G/H asphärisch ist.

Dann ist X eine rationale Moisëzon-Mannigfaltigkeit, also bimeromorph zu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ äquivalent. Die offene Bahn $G/H \cong \mathbb{C}^n$ ist dann affin-algebraisch in X , und X kann mit Hilfe eines G -stabilen holomorphen Geradenbündels G -äquivariant zu einer Kähler-Mannigfaltigkeit modifiziert werden.

Beweis:

Weil schon das Radikal transitiv auf G/H wirkt, dürfen wir annehmen, daß G auflösbar ist und $H = H^0$ gilt.

Für die in § 1 betrachtete J -äquivariante Kompaktifizierung F gilt: J ist eine positiv-dimensionale Untergruppe von $N := N_G(H^0) = N_G(H)$, d.h. J/H ist eine auflösbare Untergruppe von G , und F ist eine auflösbare Gruppenkompaktifizierung von J/H .

Nun betrachten wir wie im Beweis von Proposition 5.2. zu F eine glatte J/H -äquivalente auflösbare Gruppenkompaktifizierung $\hat{F}$ mit dem Randdivisor $\hat{E}$. Wieder liefern die Vektorfelder, die durch die Gruppenwirkung auf $\hat{F}$ induziert werden, auf dem Randdivisor einen dort verschwindenden antikanonischen Schnitt. Nach Proposition 5.2. gilt dann: $1 \leq \mathcal{K}(\hat{F}, K_{\hat{F}}^{-1})$, und mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Proposition 5.2. gilt daher: $1 \leq \mathcal{K}(\hat{F}, \hat{E})$ im Widerspruch zu Lemma 1.1.

Also ist X eine Moisëzon-Mannigfaltigkeit, und es gilt nach Lemma 2.1. für X :

$H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, d.h. alle holomorphen Geradenbündel sind G -stabil. Somit existiert ein G -stabiles holomorphes Geradenbündel L auf X . Dies liefert eine G -äquivalente meromorphe Abbildung

$$\varphi_L : X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}_N(\mathbb{C}).$$

Diese Abbildung hat die Eigenschaft, daß sie auf der offenen Bahn biholomorph auf das Bild ist.

Daher ist X bimeromorph zu einer G -äquivalenten Kähler-Kompaktifizierung Y äquivalent, auf der der algebraische Abschluß von G in $\text{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathbb{P}_N(\mathbb{C}))$ wirkt. Nach einem Satz von Rosenlicht-Matsumura [H,O 2] ist Y aber schon projektiv-rational, so daß $\mathbb{C}^n$ affin-algebraisch in X ist.

□

Kapitel 2: Kompaktifizierungen des $\mathbb{C}^n$ mit semidefinitem antikanonischem Bündel

Im Beweis von Satz 6.1. hat sich für äquivariante Kompaktifizierungen X des $\mathbb{C}^n$ wegen $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ herausgestellt, daß eine äquivariante meromorphe Abbildung, die auf der offenen Bahn biholomorph ist, durch ein G -stabiles holomorphes Geradenbündel L gegeben wird.

In diesem Kapitel soll untersucht werden, unter welchen differentialgeometrischen Bedingungen an X für L eine Potenz des antikanonischen Bündels K_X^{-1} gewählt werden kann.

7. Kompaktifizierungen X des $\mathbb{C}^n$ mit $c_1(X) > 0$:

7.1. Satz:

Es sei G eine komplexe Liegruppe, die auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X mit $\dim_{\mathbb{C}} X = 3$ und $b_2(X) = 1$ fast-homogen wirkt, so daß die offene Bahn G/H asphärisch ist.

Dann gibt es für X nur die folgenden Möglichkeiten:

- 1) $X \cong \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$
- 2) $X \cong Q_3 \subset \mathbb{P}_4(\mathbb{C})$
- 3) X ist der Schnitt der Grassmann-Mannigfaltigkeit $Gr(2, 5)$ der 2-Ebenen in $\mathbb{C}^5$, die durch Plücker-Koordinaten in $\mathbb{P}_9(\mathbb{C})$ eingebettet wird, mit einem allgemeinen $\mathbb{P}_6(\mathbb{C})$.

Beweis:

Nach Satz 6.1. ist X Moisëzon. Allgemein gilt im Fall der komplexen Dimension 3 bei irreduziblem Randdivisor für eine Moisëzon-Kompaktifizierung X des $\mathbb{C}^3$ sogar die Bedingung $c_1(X) > 0$ [P,S]. Die Zahl r mit $K_X^{-1} = L^r$ für den positiven Erzeuger L von $\text{Pic}(X)$ heißt der Index von X . Nun zeigen wir: $r \geq 2$. Dies beweist den Satz.

Nehmen wir an, X habe den Index 1: In der äquivarianten Situation wäre X in diesem Fall eine äquivariante Gruppen-Kompaktifizierung des $\mathbb{C}^3$. Die Integration der Form ω_1 liefert aber auf $\mathbb{C}^3$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion Φ_1 im Widerspruch zu der Annahme über den Index. $\square$

Wenn eine Potenz des antikanonischen Bündels eine äquivariante Kompaktifizierung X des $\mathbb{C}^n$ einbettet, dann hat die auflösbare Gruppe G einen Fixpunkt in X . Wenn zusätzlich alle Vektorfelder am Rand verschwinden, gilt für ein positives Bündel F :

$$c_1(X) \geq n \cdot c_1(F),$$

und X ist somit eine Quadrik in $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ oder $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ [K,O].

Wir haben bei nilpotenten Gruppenkompaktifizierungen X des $\mathbb{C}^n$ gesehen, daß die Koordinaten-Hyperflächen als Divisoren fortsetzbar sind.

Jetzt geben wir noch eine Charakterisierung von $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ an, die unabhängig vom fast-homogenen Standpunkt ist.

7.2. Proposition:

Es sei X eine projektiv-algebraische Kompaktifizierung des $\mathbb{C}^n$ mit irreduziblem Rand, so daß die Koordinaten-Hyperflächen als irreduzible Divisoren $D_1, \dots, D_n \subset X$ fortsetzbar sind und $D_1 \cap \dots \cap D_i$ für $i = 1, \dots, n-1$ glatte $\mathbb{C}^{n-i}$ -Kompaktifizierungen sind.

Dann ist X zu einer Quadrik in $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ oder zu $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ biholomorph äquivalent.

Beweis:

Es gelte für $r, r_1, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{N}$:

$$[K_X^{-1}] = [E^r], [D_1] = [E^{r_1}], \dots, [D_{n-1}] = [E^{r_{n-1}}],$$

wobei E der irreduzible Randdivisor in X sei.

Nun liefert die wiederholte Anwendung der Adjunktionsformel:

$$-K_{D_1 \cap \dots \cap D_{n-1}} = E^{r-r_1-\dots-r_{n-1}}|_{D_1 \cap \dots \cap D_{n-1}}.$$

Die Kurve $C := D_1 \cap \dots \cap D_{n-1}$ ist aber zu $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ biholomorph, und daher gilt:

$$c_1(C) = c_1(E^{r-r_1-\dots-r_{n-1}})|_C = 2.$$

Mit $1 \leq E \cdot C \leq 2$ folgt, daß $r \geq 1 + r_1 + \dots + r_{n-1} \geq 1 + (n-1) = n$ gilt. Daher gilt

$$c_1(X) \geq n \cdot c_1(E)$$

für ein amples Bündel E auf X . Mit [K,O] folgt die Behauptung.

□

8. Eine lokale Einbettung:

Für ein holomorphes Geradenbündel L auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X bezeichne $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ die erste Chernklasse von L .

Wenn X die komplexe Dimension n hat, kann $c_1(L)^n \in H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ vermöge Integration über X als ganze Zahl aufgefaßt werden. Das Bündel L sei bzgl. einer offenen Überdeckung $\{U_i\}$ von X durch die Übergangsfunktionen $\{f_{ij}\}$ gegeben.

Eine hermitesche Bündelmetrik h auf L ist dann durch eine Sammlung glatter positiver Funktionen $h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die auf U_{ij}

$$h_i = |f_{ij}|^{-2} h_j$$

erfüllen. Dann liefert

$$\omega_h := -\partial\bar{\partial} \log h_i$$

die Krümmungsform von L bzgl. der Metrik h und

$$\left[\frac{i}{2\pi} \cdot \omega_h \right] = \left[\frac{1}{2\pi i} \cdot \partial\bar{\partial} \log h_i \right]$$

die erste Chernklasse von L .

Dabei heißt L positiv semidefinit, wenn es eine hermitesche Metrik h auf L gibt, so daß $i \cdot \omega_h$ eine positive semidefinite $(1,1)$ -Form auf X liefert. Dies ist äquivalent dazu, daß die hermitesche Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 (-\log h_i)}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \right)_{k,l}$$

positiv semidefinit auf X ist.

Es sei X eine n -dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit einem positiv semidefiniten holomorphen Geradenbündel L auf X , das in mindestens einem Punkt positiv ist. Dann gilt:

$$c_1(L)^n = \int_X \left(\frac{i}{2\pi} \cdot \omega_h \right)^n > 0.$$

Bei nur positiv semidefinitem Bündel hätte man hier nur ≥ 0 erhalten.

8.1. Lemma:

Es sei X eine Kompaktifizierung des $\mathbb{C}^n$ mit semidefinitem antikanonischem Bündel. Dann gilt $c_1(X) \geq 0$.

Beweis:

Wir zeigen, daß auf X keine Potenz des kanonischen Bündels positiv semidefinit ist.

Unter der Annahme, daß auf X ein positiv semidefinites holomorphes Geradenbündel L mit

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, K_X^m \otimes L^{-1}) > 0$$

existiert, konstruiert Kodaira eine positive Volumenform v auf X , so daß für alle holomorphen Abbildungen f von der n -dimensionalen Polykreisscheibe D_r vom Radius r nach X die folgende Abschätzung gilt [K 3]:

$$\int_{D_r} f^*(v) \geq \pi^n r^{2n}.$$

Für jede holomorphe Abbildung $f : D_r \longrightarrow X$ ist der Hauptgrad definiert als

$$\deg(f \mid D_r) = \frac{\int_{D_r} f^*(v)}{\int_X v}.$$

Es sei $g : \mathbb{C}^n \longrightarrow X$ die Einbettungsabbildung und $f := g|_{D_r}$, dann gilt $\deg(f \mid D_r) < 1$ im Widerspruch zu der Abschätzung bei der Wahl von $L = K_X^m$.

□

Ein holomorphes Geradenbündel L auf einer kompakten komplexen Moisèzon-Mannigfaltigkeit X ist *numerisch effektiv*, wenn für jedes Kurve $C \subset X$ gilt: $\deg L \mid_C \geq 0$.

Dabei ist eine Kurve in X eine reduzierte irreduzible analytische Teilmenge der reellen komplexen Dimension 1.

Wenn L positiv semidefinit ist, ist L auch numerisch effektiv.

8.2. Lemma:

Es sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit numerisch effektivem antikanonischem Bündel mit $\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) = n$. Dann gilt:

$$H^q(X, K_X \otimes K_X^{-1}) \cong H^q(X, \mathcal{O}) \cong 0 \quad \text{für alle } q \geq 1.$$

Beweis:

Es sei $L := K_X^{-1}$. Somit ist L numerisch effektiv mit $c_1(L)^n > 0$, da dies der führende Term in $h^0(X, L^m)$ ist. Die Behauptung folgt dann mit Theorem 3.1. aus [A,S].

□

8.3. Korollar:

Es sei X eine Kompaktifizierung des $\mathbb{C}^n$ mit semidefinitem antikanonischem Bündel und $\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) = n$. Dann gilt:

$$H^q(X, K_X \otimes K_X^{-1}) \cong H^q(X, \mathcal{O}) \cong 0 \quad \text{für alle } q \geq 1.$$

8.4. Proposition:

Es sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit positiv semidefinitem antikanonischem Bündel und $\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) = n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Dann gilt:

Es gibt einen Punkt $x_0 \in X$ und ein $m \in \mathbb{N}$, so daß die holomorphen Schnitte in $H^0(X, K_X^{-m})$ in der Nähe von x_0 eine abgeschlossene Einbettung nach $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ liefern.

Beweis:

Wir betrachten auf X das holomorphe Geradenbündel K_X^{-1} :

Durch die Wahl einer Basis $s_0, \dots, s_N$ von $H^0(X, K_X^{-k})$ erhält man eine meromorphe Abbildung

$$\varphi_{K_X^{-k}} : X \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$$

mit

$$x \mapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)].$$

Dabei ist $\varphi_{K_X^{-k}}$ eine holomorphe Abbildung außerhalb der Basispunkte

$$B_{K_X^{-k}} := \{x \in X \mid s_0(x) = \dots = s_N(x) = 0\},$$

so daß auf $X \setminus B_{K_X^{-k}}$ gilt: $K_X^{-k} \simeq \varphi_{K_X^{-k}}^*(H)$ wobei H das Hyperebenenbündel auf $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ ist.

Es sei nun $x_0 \in X$ so gewählt, daß K_X^{-k} in einer kompakten Umgebung $V(x_0)$ positiv definit ist. Solch ein Punkt existiert nach [A,S]. Wir wählen die Punkte $x, y \in V(x_0)$.

Es sei nun $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung von X in x und y mit exceptionellen Divisoren $E_x = \pi^{-1}(x)$ und $E_y = \pi^{-1}(y)$. Es sei $E := E_x + E_y$.

Oder es bezeichne $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung von X , aber diesmal in einem Punkt $x \in V(x_0)$. Mit E bezeichnen wir dann den exceptionellen Divisor $\pi^{-1}(x)$.

Nun gilt aber für das kanonische Bündel auf $\tilde{X}$:

$$K_{\tilde{X}} = \pi^*(K_X) + (n-1)E,$$

d.h.

$$-K_{\tilde{X}} = \pi^*(-K_X) - (n-1)E.$$

Und somit

$$\begin{aligned}
 \pi^*(-kK_X) - \nu E &= K_{\tilde{X}} + (-K_{\tilde{X}} + \pi^*(-kK_X) - \nu E) \\
 &= K_{\tilde{X}} + (\pi^*(-K_X) - (n-1)E + \pi^*(-kK_X) - \nu E) \\
 &= K_{\tilde{X}} + (\pi^*(-(k+1)K_X) - (n-1+\nu)E),
 \end{aligned}$$

für $\nu = 1, 2$.

Nun ist $-(k+1)K_X$ aber auf X ein positiv semidefinites Bündel, das in mindestens einem Punkt in X , und daher in einer offenen Umgebung dieses Punktes positiv definit ist. Die gleiche Eigenschaft erfüllt dann auch $\pi^*(-(k+1)K_X)$ auf $\tilde{X}$. Da mit X auch $\tilde{X}$ eine Moisezon-Mannigfaltigkeit ist, können wir nach Wahl von entsprechend großem $k \in \mathbb{N}$ auf das positiv semidefinite Bündel $(\pi^*(-(k+1)K_X) - (n-1+\nu)E)$, das in mindestens einem Punkt von $\tilde{X}$ positiv definit ist, den Verschwindungssatz [A,S] anwenden:

$$\begin{aligned}
 &H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\pi^*(-kK_X) - \nu E)) \\
 &\cong H^1(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} \otimes (\pi^*(-(k+1)K_X) - (n-1+\nu)E)) \cong 0.
 \end{aligned}$$

Das übliche Kompaktheitsargument für $V(x_0)$ garantiert die Existenz eines $m \in \mathbb{N}$ mit den gewünschten Eigenschaften [G,H].

□

Natürlich kann man eine analoge Proposition auch für ein beliebiges holomorphes Geradenbündel L auf X zeigen, so daß man dann für das Bündel $L^k \otimes K_X$ lokal eine abgeschlossene Einbettung bekommt. Dies wird in [R] für eine Kähler-Mannigfaltigkeit gezeigt.

8.5. Satz:

Es sei X eine äquivariante Kompaktifizierung des $\mathbb{C}^n$ mit semidefinitem antikanonischem Bündel und $\mathcal{K}(X, K_X^{-1}) = n$. Dann gilt:

Eine Potenz des antikanonischen Bündels liefert eine G -äquivariante meromorphe Abbildung

$$\varphi_{K_X^{-k}} : X \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C}),$$

die die offene Bahn $\Omega \cong G/H \cong \mathbb{C}^n$ einbettet.

Beweis:

Jede holomorphe Transformation aus G induziert einen Automorphismus des Geradenbündels K_X^{-k} und daher eine lineare Transformation des Vektorraumes $H^0(X, K_X^{-k})$. Nach Proposition 8.4. und Lemma 8.1. existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so daß die G -äquivariante meromorphe Abbildung

$$\varphi_{K_X^{-k}} : X \rightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$$

in der Nähe eines Punktes $x_0 \in \Omega$ eine abgeschlossene Einbettung liefert. Die Abbildung $\varphi_{K_X^{-k}}$ ist wegen der Äquivarianz auf Ω holomorph und topologisch, d.h. lokal biholomorph und endlich und somit auf $\Omega \cong \mathbb{C}^n$ biholomorph.

□

Kapitel 3: Komplexe Flächen mit Vektorfeldern

Zweidimensionale zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, kurz komplexe Flächen, mit holomorphen Vektorfeldern mit Nullstellen werden in $[C,H,K]$ klassifiziert.

In $[C,S]$ werden komplexe Flächen mit holomorphen C^* - Wirkungen mit isolierten Fixpunkten genauer untersucht. Die komplexen Flächen sind nach $[C,H,K]$ dann schon rational.

Die minimalen Flächen X mit einem Vektorfeld Θ mit Nullstellen sind die Hirzebruch-Flächen $\sum_n$ für $n = 0, 2, 3, \dots$ und $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, die holomorphen Faserbündel mit Faser $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ und Strukturgruppe $PGL(2, \mathbb{C})$ über einer glatten Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$ und die Flächen in Klasse VII_0 $[C,H,K]$.

Wünschenswert ist es, komplexe Flächen mit holomorphen Vektorfeldern zu klassifizieren.

9. Klassifikation komplexer Flächen mit Vektorfeldern

9.1. Satz:

Sei X eine minimale kompakte komplexe Fläche, die ein holomorphes Vektorfeld Θ besitzt. Dann ist X eine der folgenden Flächen:

- (1) eine Hirzebruch-Fläche $\sum_n$ für $n = 0, 2, 3, \dots$ oder $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

- (2) eine Kompaktifizierung eines holomorphen Geradenbündels über einer kompakten Riemannschen Fläche
- (3) eine Kompaktifizierung eines affinen $\mathbb{C}$ -Bündels über einer kompakten Riemannschen Fläche, so daß das zum affinen Bündel assoziierte holomorphe Geradenbündel einen nicht-trivialen holomorphen Schnitt besitzt
- (4) ein fast-homogenes $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ - Bündel über einem Torus
- (5) eine fast-homogene Hopf-Fläche
- (6) ein Torus
- (7) ein holomorpher Seifertscher Prinzipalfaserraum $\pi : X \rightarrow X/T$ mit einem komplexen Torus T als Strukturgruppe
- (8) eine Inoue-Fläche vom Typ $X_{N,p,q,r;t}^{(+)}$
- (9) eine Fläche in Klasse VII_0 mit $b_2(X) > 0$ und algebraischer Dimension $a(X) = 0$ mit einem holomorphen Vektorfeld mit Nullstellen

Die einzelnen Klassen können einen Schnitt haben. So ist eine Fläche aus (7) z.B. eine Fläche, auf der ein komplexer eindimensionaler Torus mit Torusbahnen wirkt [Ho]. Also sind Produkte von Tori in (6) und (7). Jede der Flächen in (8) ist Quotient von $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ nach einer diskreten Gruppe $G_{N,p,q,r;t}^{(+)}$ mit geeigneten Parametern N, p, q, r und t [I]. Ferner erkennt man, daß alle Flächen in Satz 9.1. holomorphe Vektorfelder besitzen. Auf Flächen in (1), (2), (4), $\dots$, (8) gibt es holomorphe Vektorfelder, die durch eine $\mathbb{C}^*$ -Wirkung induziert werden.

Der Satz 9.1. kann wegen der Tatsache, daß die Flächen in Klasse VII_0 mit einem holomorphen Vektorfeld Θ mit Nullstellen nicht feiner klassifiziert werden, mit Standardargumenten gezeigt werden.

Auch im Fall eines holomorphen Vektorfeldes Θ mit Nullstellen auf einer Fläche X in Klasse VII_0 will man mehr sagen können. Dies untersuchen wir für $\mathbb{C}^*$ -Vektorfelder.

9.2. Satz:

Sei X eine minimale kompakte komplexe Fläche, die ein von einer holomorphen $\mathbb{C}^*$ -Wirkung induziertes Vektorfeld Θ mit Nullstellen besitzt. Dann tritt einer der beiden Fälle ein:

- (1) X ist Kompaktifizierung eines Geradenbündels L über einer kompakten Riemannschen Fläche oder $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.
- (2) X ist eine fast-homogene Hopf-Fläche. Somit ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ abelsch.

Nach Empfehlungen von F.A. Bogomolov haben wir topologische Methoden zum Beweis von Satz 9.2. versucht, nämlich Betrachtungen des Quotienten X/S^1 mit Singularitäten. Diese Methoden werden wahrscheinlich zum Ziele führen, dennoch beweisen wir Satz 9.2. stattdessen mit einer äquivarianten Version des Atiyah-Singer-Indextheorems und Informationen über Zykeln in parabolischen Inoue-Flächen. Für den Beweis von Satz 9.1. benötigen wir:

9.3. Lemma:

Es sei X eine kompakte komplexe Fläche mit einer holomorphen $\mathbb{C}$ -Wirkung, so daß alle Bahnen außerhalb einer analytischen Menge Tori sind.

Dann ist X ein holomorpher Seifertscher Prinzipalfaserraum $\pi : X \rightarrow X/T$ mit einem komplexen Torus T als Strukturgruppe.

Beweis:

Wir brauchen nach [Ho] nur zu zeigen, daß es auf X eine Wirkung eines komplexen eindimensionalen Torus T mit den gleichen Bahnen gibt.

Für $x \in X$ bezeichne $G_x := \{g \in \mathbb{C} | g(x) = x\}$ die Isotropieuntergruppe in $\mathbb{C}$. Dann ist

$$\mathcal{I} := \{(x, g) | g(x) = x\} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times G_x \subset X \times \mathbb{C}$$

eine analytische Menge in $X \times \mathbb{C}$. Man hat nun die holomorphen Projektionen

$$\pi_1 : X \times \mathbb{C} \rightarrow X$$

und

$$\pi_2 : X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dabei ist π_2 eine eigentliche holomorphe Abbildung nach $\mathbb{C}$, so daß $\pi_2|_{\mathcal{I}}$ eine eigentliche holomorphe Abbildung ist, d.h. das Bild $\pi_2(\mathcal{I}) \subset \mathbb{C}$ ist eine analytische Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Der Beweis verläuft nun indirekt: Wir nehmen an, daß die Isotropiegruppen G_x allgemeiner Bahnen echt variieren. Zuerst sollte man bemerken, daß es höchstens endlich viele $\mathbb{C}^*$ -Bahnen in X gibt. Somit finden wir ein Isotropieelement γ , daß auf den $\mathbb{C}^*$ -Bahnen frei wirkt. Solch ein Element nennen wir *generisch*.

Mit γ ist jedes Vielfache $n \cdot \gamma$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ generisch. Eine irreduzible Komponente A von $\mathcal{I}$ heißt *generisch*, wenn ein Paar (x, γ) mit generischem γ in A liegt.

Mit $\text{Fix}(\mathbb{C})$ sei die Menge der möglichen Fixpunkte der $\mathbb{C}$ -Wirkung auf X bezeichnet. Dann sei

$$F := \text{Fix}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \subset \mathcal{I}$$

und für $x \in \text{Fix}(\mathbb{C})$ sei

$$F_x := \{x\} \times \mathbb{C} \subset F.$$

Nun betrachte man eine generische Komponente $A \not\subset F$ in der Menge $\mathcal{I}$.

Die analytische Menge A ist offenbar zweidimensional. Es ist

$\pi_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$ surjektiv, weil wir ja annehmen, daß die Isotropiegruppen G_x allgemeiner Bahnen echt variieren. Die Fasern der Abbildung $\pi_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$ sind $\mathbb{C}$ -stabil, so daß die Komponenten einer allgemeinen Faser dieser Abbildung eindimensional sind.

Es sei $x \in X$ ein Punkt mit $F_x \subset A$. Nun ist auch $\pi_2|_{F_x} : F_x \rightarrow \mathbb{C}$ surjektiv, und somit enthält eine Faser $(\pi_2|_A)^{-1}(\gamma)$ für jedes generische $\gamma \in \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$ -Fixpunktkurve C_γ . Aber in X existieren überhaupt nur endlich viele Fixpunktkurven $C_1, \dots, C_l$. Also enthält die zweidimensionale irreduzible analytische Menge A eine Menge $C_{i_0} \times \mathbb{C}$ für ein $i_0 \in \{1, \dots, l\}$, d.h. $A \subset F$.

Dies zeigt, daß für alle $x \in X$ gilt: $F_x \not\subset A$.

Wegen $\pi_2(A) = \mathbb{C}$ gibt es einen Punkt

$$(x_0, 0) \in (A \cap (X \times \{0\})).$$

Dieser Punkt ist aber nur in endlich vielen irreduziblen generischen Komponenten $A_1, A_2, \dots, A_k \not\subset F$ enthalten. Es sei $S := \cup_{i=1}^k A_i$ und für $x \in X$ sei $C_x := \{x\} \times \mathbb{C}$. Für jeden Punkt $x \in X$ und jedes $A_i \subset S$ ist also die Menge $C_x \cap A_i$ diskret.

Es sei $\delta > 0$ fest vorgegeben. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\epsilon_n > 0$, so daß für

$$B_{\epsilon_n} := \{(x, z) | x \in U_{\epsilon_n}(x_0), z \in \Delta_\delta(0)\} \subset X \times \mathbb{C}.$$

gilt: Mit $(x, \gamma) \in B_{\epsilon_n} \cap S$ liegt auch jedes $(x, m \cdot \gamma)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \leq n$ in der Menge $B_{\epsilon_n} \cap S$. Also existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\bar{A}_{i_n}$ mit $i_n \in \{1, \dots, k\}$, so daß die Anzahl der Elemente der Menge $\bar{A}_{i_n} \cap C_x \cap B_{\epsilon_n}$ größer oder gleich $\frac{n}{k}$ ist. Insbesondere wächst diese Anzahl für $x \rightarrow x_0$ im Widerspruch dazu, daß der Schnitt $C_{x_0} \cap A_i$ diskret ist für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.

Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß das Bild einer irreduziblen generischen Komponente A von $\mathcal{I}$ unter der eigentlichen Abbildung π_2 ganz $\mathbb{C}$ ist.

Nun ist $\pi_2(A)$ ein Punkt $\gamma \neq 0 \in \mathbb{C}$. Weil A zweidimensional ist, gilt dann $A = X \times \{\gamma\}$.

Zusammenfassend ergibt sich, daß jede generische Komponente A ein generisches Element $\gamma \in G_x$ für alle $x \in X$ liefert. Wir haben nach der Voraussetzung mindestens eine generische Komponente, d.h. daß $\mathbb{C}^*$ auf X wirkt. Wenn die generische $\mathbb{C}^*$ -Isotropie variiert, können wir ein analoges Argument anwenden, d.h. die vorgegebene $\mathbb{C}$ -Wirkung faktorisiert durch eine Torus-Wirkung.

□

Dieses Lemma 9.3. gestattet es uns nun, die minimalen kompakten komplexen Flächen X , die ein holomorphes Vektorfeld Θ besitzen, zu klassifizieren. Dabei machen wir keinen Gebrauch von der Klassifikation von

Flächen mit einem holomorphen Vektorfeld mit Nullstellen [C,H,K]. Die Liste des Satzes 9.1. enthält in der Tat nur Flächen, die ein holomorphes Vektorfeld besitzen.

Beweis von Satz 9.1.:

Da Enriques-Flächen, K 3-Flächen und minimale Flächen von allgemeinem Typ keine holomorphen Vektorfelder besitzen, bleiben nach Hauptsatz IV 1.1. aus [B,P,V;S. 187] noch die folgenden Fälle:

1) Man braucht für minimale rationale Flächen nichts zu beweisen; denn bekanntlich sind sie fast-homogen und besitzen somit viele holomorphe Vektorfelder.

2) Wir untersuchen nun die Regelflächen:

Es sei X ein holomorphes Faserbündel mit Faser $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ und Strukturgruppe $PGL(2, \mathbb{C})$ über einer glatten Kurve C vom Geschlecht $g \geq 1$:

Fall (i): Das induzierte Vektorfeld Θ_C auf der Kurve C ist nicht trivial. Dann ist C eine elliptische Kurve. Wenn alle $\mathbb{C}$ -Bahnen in X kompakt sind, sind diese Bahnen elliptische Kurven.

Somit gibt es nach Lemma 9.3. auf X eine holomorphe Wirkung eines komplexen Torus T mit den gleichen Bahnen wie die $\mathbb{C}$ - Wirkung. Daher ist X bezüglich der kanonischen holomorphen Projektion $\pi : X \rightarrow X/T$ ein holomorpher Seifertscher Prinzipalfaserraum mit Strukturgruppe T [Ho].

Es gebe nun in X eine nicht-kompakte Bahn. Dann operiert eine unendliche Gruppe Γ fasererhaltend auf X , d.h. Γ wirkt auf dem Torus C trivial. Die Γ enthaltende Stabilisatoruntergruppe einer Faser in $Aut_{\mathcal{O}}^0(X)$ hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten [F]. Somit wirkt schon

eine positiv-dimensionale algebraische Gruppe fasernerhaltend auf X . Diese Wirkung induziert ein nicht-triviales holomorphes Vektorfeld, daß tangential an die Fasern ist. Somit ist X ein fast-homogenes $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ - Bündel über dem Torus C , d.h. in (4).

Fall (ii): Das induzierte Vektorfeld Θ_C auf der Kurve C ist trivial. Daher wirkt $\mathbb{C}$ trivial auf dem Albanesetorus von X , und X ist $\mathbb{C}$ - äquivariant in $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ einbettbar [O 1].

Mit G bezeichnen wir nun den algebraischen Abschluß von $\mathbb{C}$ in $Stab(X) := \{g \in Aut_{\mathcal{O}}(\mathbb{P}_N(\mathbb{C})) | g(X) = X\}$. Nun ist G eine abelsche algebraische Gruppe: $G = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^l$.

Fall (ii-1): $l > 0$, d.h. das Vektorfeld Θ ist durch eine algebraische $\mathbb{C}^*$ -Wirkung auf X gegeben. Da solche nicht-trivialen $\mathbb{C}^*$ - Wirkungen auf $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ genau zwei verschiedene Fixpunkte besitzen, bekommt man auf der algebraischen Fläche X eine $\mathbb{C}^*$ - Fixpunktkurve der Form $X^0 \cup X^\infty$. Dabei sind dann X^0 und X^∞ mit dem Nullschnitt und dem ∞ - Schnitt in X identifizierbar.

Somit ist X eine Kompaktifizierung eines holomorphen Geradenbündel über C .

Fall (ii-2): Das Vektorfeld Θ ist durch eine algebraische $\mathbb{C}$ -Wirkung auf X gegeben. Eine irreduzible Komponente $\sigma \subset Fix(\mathbb{C})$ liefert einen Schnitt im $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ -Bündel über C , so daß X die Kompaktifizierung eines affinen $\mathbb{C}$ -Bündels über C ist. Dieses affine Bündel sei bezüglich einer Trivialisierung $\{U_i\}$ durch

$$(x, z_i) = (x, \lambda_{ij}(x) \cdot z_j + \mu_{ij}(x))$$

gegeben. Für die $\mathbb{C}$ -Wirkung gelte

$$\xi(x, z_i) = (x, z_i + c_i(x) \cdot \xi).$$

Daher gilt auf $U_i \cap U_j$:

$$\lambda_{ij}(x) \cdot z_j + \mu_{ij}(x) + c_i(x) \cdot \xi = \lambda_{ij}(x) \cdot z_j + \lambda_{ij}(x) \cdot c_j(x) \cdot \xi + \mu_{ij}(x)$$

Da dies für alle $\xi \in \mathbb{C}$ gilt, folgt mit

$$c_i(x) \cdot \xi = \lambda_{ij}(x) \cdot c_j(x) \cdot \xi,$$

daß das zum affinen Bündel assoziierte holomorphe Geradenbündel einen nicht-trivialen holomorphen Schnitt besitzt:

$$c_i(x) = \lambda_{ij}(x) \cdot c_j(x).$$

Umgekehrt läßt sich auf einer Kompaktifizierung eines affinen $\mathbb{C}$ -Bündels, dessen assoziiertes holomorphes Geradenbündel einen nicht-trivialen holomorphen Schnitt besitzt, in der obigen Weise eine nicht-triviale $\mathbb{C}$ -Wirkung definieren.

3) Flächen in Klasse VII_0 :

Wir betrachten Flächen X , die ein Vektorfeld Θ ohne Nullstellen besitzen. Dann hat das Tangentialbündel der Fläche X ein triviales Untergeradenbündel. Dies impliziert für die zweite Chern-Zahl von X : $c_2(X) = 0$. Nun gilt:

$$0 = \chi_{top}(X) = c_2(X) = 2 - 2b_1(X) + b_2(X).$$

Mit $b_1(X) = 1$ folgt somit: $b_2(X) = 0$ und X ist nach [Bo]¹ eine Hopf-Fläche oder eine Inoue-Fläche aus [I].

Eine Hopf-Fläche X der algebraischen Dimension $a(X) = 0$ hat eine abelsche Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ [K 2;II;Theorem 32]. Sie ist somit schon

¹ In dieser speziellen Situation ist es möglich, die tiefliegenden Methoden von [Bo] zu umgehen.

fast-homogen [H,O 1]. Im Fall der algebraischen Dimension $a(X) = 1$ gilt, daß X ein elliptischer Faserraum $\pi : X \rightarrow C$ über einer Kurve C ist. Wenn das induzierte Vektorfeld $\Theta|_C$ nicht-trivial ist, ist X nach Lemma E aus [C,H,K] ein Torusbündel über einem Torus. Dies ist wegen $b_1(X) = 1$ nicht möglich. Daher ist Θ tangential an die Fasern der holomorphen Abbildung π , deren generische Fasern glatte elliptische Kurven sind. Somit kann wieder Lemma 9.3. angewendet werden.

Unter den Inoue-Flächen besitzt nur die Serie der Flächen (Bezeichnungen wie in [I]) $X_{N,p,q,r;t}^{(+)}$ überhaupt ein holomorphes Vektorfeld. Jede dieser Flächen ist Quotient von $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ nach einer diskreten Gruppe $G_{N,p,q,r;t}^{(+)}$ mit geeigneten Parametern N, p, q, r und t . Das holomorphe Vektorfeld entspricht auf $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ einem konstanten Vektorfeld. Auf der Fläche induziert dies ein $\mathbb{C}^*$ - Vektorfeld ohne Nullstellen.

4) Hyperelliptische Flächen:

Solch eine Fläche X ist ein algebraisches Torus-Bündel über einem Torus E . Das zugehörige Torusprinzipalbündel $\hat{X}$ über E ist dann eine endliche unverzweigte Überlagerung von X . Das holomorphe Vektorfeld Θ kann dann zu einem nicht-trivialen holomorphen Vektorfeld $\hat{\Theta}$ auf $\hat{X}$ geliftet werden. Wenn Θ nicht tangential an die Faserung $\pi : X \rightarrow E$ ist, ist auch $\hat{\Theta}$ nicht tangential an die Faserung $\hat{\pi} : \hat{X} \rightarrow E$. Dann ist $\hat{X}$ fast-homogen und somit ein kompakter komplexer Torus [Po]. Dann ist X als endliche unverzweigte Unterlagerung eines kompakten komplexen Torus selbst ein Torus im Widerspruch dazu, daß der Albanestorus von X eindimensional ist.

Somit ist das Vektorfeld Θ tangential an die Fasern, und Θ verschwindet nicht auf allen Fasern. Die $\mathbb{C}$ - Wirkung auf X induziert die triviale

Wirkung auf dem Albanesetorus. Daher gibt es eine $\mathbb{C}$ - äquivalente Einbettung von X in einen $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ [O 1]. Damit wäre auch eine Faser, also eine elliptische Kurve $\mathbb{C}$ - äquivalent einbettbar.

Also besitzen hyperelliptische Flächen keine Vektorfelder.

5) Primäre Kodaira-Flächen:

Solch eine Fläche X ist ein nicht-algebraisches Torus-Bündel über einem Torus, und wie bei 4) folgt, daß das Vektorfeld Θ tangential an die Fasern ist.

Somit gibt es nach Lemma 9.3. auf X eine holomorphe Wirkung eines komplexen Torus T mit den gleichen Bahnen wie die $\mathbb{C}$ - Wirkung. Daher ist X bezüglich der kanonischen holomorphen Projektion $\pi : X \rightarrow X/T$ ein holomorpher Seifertscher Prinzipalfaserraum mit Strukturgruppe T .

6) Sekundäre Kodaira-Flächen:

Solche Flächen X besitzen primäre Kodaira-Flächen als unverzweigte Überlagerungen und sind selbst elliptische Faserräume über rationalen Kurven mit $b_1(X) = 1$. Wenn das induzierte Vektorfeld $\Theta|_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}$ trivial ist, ist Θ somit tangential an die Fasern. Die allgemeinen Fasern sind damit glatte elliptische Kurven. Jetzt kann man wieder Lemma 9.3. anwenden. Somit hat Θ keine Nullstellen. Im anderen Fall ist X nach Lemma E aus [C,H,K] ein Torus-Bündel über $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ und wegen $b_1(X) = 1$ eine fast-homogene Hopf-Fläche.

7) Tori:

Sie besitzen natürlich die links-invarianten und somit nicht-verschwindenden holomorphen Vektorfelder.

8) Minimale eigentliche elliptische Flächen:

Solch eine Fläche X ist ein elliptischer Faserraum über einer Kurve C mit Kodaira-Dimension $\text{Kod}(X) = 1$. Wenn für das induzierte Vektorfeld $\Theta_C \neq 0$ gilt, ist X nach Lemma E aus [C,H,K] ein Torusbündel über einer kompakten Riemannschen Fläche C vom Geschlecht $g \leq 1$. Nach der Additionsformel für die Kodaira-Dimension gilt in diesem Fall $\text{Kod}(X) < 1$ [U]. Daher ist Θ wieder tangential an die Fasern. Da die generischen Fasern glatte elliptische Kurven sind, beendet eine weitere Anwendung von Lemma 9.3. den Beweis.

□

Somit hat man die Flächen X mit einem holomorphen Vektorfeld Θ ohne Nullstellen genauer klassifizieren können. Speziell kann man hier also mehr für Flächen in Klasse VII_0 sagen.

Bevor wir Satz 9.2. beweisen können, benötigen wir einige Vorbereitungen:

Für Flächen X der algebraischen Dimension $a(X) = 0$ gilt, daß die Anzahl der irreduziblen Kurven in X durch $h^{1,1}(X) + 2$ beschränkt ist [B,P,V], d.h. man hat in X nur endlich viele Kurven.

Um die Kompaktifizierung der nicht-abgeschlossenen $\mathbb{C}^*$ - Bahnen zu verstehen, beweisen wir zuerst (vgl. [Po]):

9.4. Proposition:

Sei X eine kompakte komplexe Fläche mit einer holomorphen $\mathbb{C}^*$ - Wirkung auf X . Es sei $D \subset X$ eine irreduzible Kurve, die einen Fixpunkt

besitzt. Für einen Punkt $x_0 \in (X \setminus D)$ bezeichne $T(x_0)$ den topologischen Abschluß der Bahn $\mathbb{C}^*(x_0)$ in X .

Dann besteht der Schnitt $T(x_0) \cap D$ nur aus Fixpunkten, oder der Schnitt ist leer.

Beweis von Proposition 9.4.:

Es sei d_0 ein Fixpunkt der $\mathbb{C}^*$ -Wirkung in D , und es sei $d \in (T(x_0) \cap D)$. Somit existiert eine Folge $h_n \in \mathbb{C}^*$, so daß die Folge $h_n(x_0)$ gegen den Punkt $d \in D$ konvergiert. Wir nehmen an, daß d kein Fixpunkt ist. $\mathbb{C}^*$ wirkt transitiv auf D außerhalb der Fixpunkte. Also existiert ein $h \in \mathbb{C}^*$, das den Punkt d in einen Punkt d' in einer Umgebung $V(d_0)$ von d_0 transformiert, in der die Wirkung von $\mathbb{C}^*$ die Form:

$$t \in \mathbb{C}^* : (w_1, w_2) \rightarrow (t^k \cdot w_1, t^l \cdot w_2)$$

für ganze Zahlen k und l hat (vgl. Satz von Cartan in [B,T]).

Dann konvergiert also die Folge $h(h_n(x_0))$ gegen d' , d.h. es existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ das Folgenglied $h(h_n(x_0))$ in $V(d_0)$ liegt. Es sei $g_n := h_n \cdot h_{n_0}^{-1}$ und $y_0 := h_{n_0}(x_0) \in (V(d_0) \setminus D)$.

Dann konvergiert die Folge $g_n(y_0)$ gegen d' . Dies heißt in lokalen Koordinaten von $V(d_0)$:

Der Vektor

$$(t_n^k \cdot w_1, t_n^l \cdot w_2)$$

mit $k \neq 0$ und $l \neq 0$ konvergiert gegen d' , wenn t_n den Elementen g_n entspricht.

Da der Grenzwert von $g_n(y_0)$ ein Punkt in D ist, konvergiert weder die Folge t_n noch eine Teilfolge von ihr in $\mathbb{C}^*$, d.h. $t_n^k \rightarrow 0$ und $t_n^l \rightarrow 0$ im Widerspruch zur Annahme über den Punkt d .

□

Jetzt betrachten wir einen speziellen Typ von Flächen X der algebraischen Dimension $a(X) = 0$ in Klasse VII_0 , die parabolischen Inoue-Flächen. Diese Flächen werden im Beweis von Satz 9.2. erscheinen. Für deren Konstruktion verweisen wir auf [N 2].

Eine solche Fläche X mit $0 < n := b_2(X)$ besitzt ein eindeutiges Vektorfeld Θ , das eine glatte elliptische Kurve E als Fixpunktkurve besitzt.

Ansonsten gibt es in X noch einen Zykel Z von n rationalen Kurven, die für $n \geq 2$ glatt sind, so daß die n singulären Punkte von Z isolierte Fixpunkte von Θ sind.

Ferner gilt: $E \cdot E = -n$, $Z \cdot Z = 0$, und $E \cdot Z = 0$.

Beweis von Satz 9.2.:

Zuerst betrachten wir den Fall der algebraischen Dimension $a(X) = 2$. Dann braucht man für rationale Flächen nichts zu beweisen. Wir untersuchen nun die Regelflächen:

Es sei X ein holomorphes Faserbündel mit Faser $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ und Strukturgruppe $PGL(2, \mathbb{C})$ über einer glatten Kurve C vom Geschlecht $g \geq 1$, dann ist das induzierte Vektorfeld Θ_C auf der Kurve C trivial. Diese Situation haben wir speziell für $\mathbb{C}^*$ - Wirkungen im Beweis von Satz 9.1. untersucht.

Im Fall der algebraischen Dimension $a(X) = 1$ ist X also ein elliptischer Faserraum über einer kompakten Kurve C . Wenn das induzierte Vektorfeld Θ_C auf C verschwindet, existiert eine glatte Fixpunktkurve von Θ auf X , deren irreduzible Komponenten in den Fasern von $X \rightarrow C$ liegen, da Θ auf den generischen Fasern nicht verschwindet.

Lokale Linearisierung der $\mathbb{C}^*$ -Wirkung in einem Punkt der Fixpunktkurve ergibt einen Widerspruch, so daß $\Theta_C \neq 0$ gilt und X nach Lemma E aus [C,H,K] ein Torusbündel über $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ist. Daher ist X eine fast-homogene Hopf-Fläche, d.h. X hat abelsche Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$.

Es bleibt der Fall der algebraischen Dimension $a(X) = 0$:

Nun muß man sich mit Flächen X in Klasse VII_0 befassen. Das von der $\mathbb{C}^*$ -Wirkung induzierte Vektorfeld Θ ist nicht generisch [C,H,K]. Somit hat die induzierte lineare Darstellung auf dem holomorphen Tangentialraum $T_p^{1,0} X$ in mindestens einem Fixpunkt p die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$. Also gibt es mindestens eine glatte Fixpunktkurve $C^{fix} \subset X$. Weil in X überhaupt nur endlich viele Kurven existieren, definieren wir S nun als die endliche Vereinigung der irreduziblen Kurven $D_i \subset X$ mit $i = 1, \dots, m$.

Die $\mathbb{C}^*$ -Wirkung auf X stabilisiert die endlich vielen Kurven: $\mathbb{C}^*(D_i) = D_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Die Menge $U := X \setminus S$ besteht dann aus allen nicht-abgeschlossenen Bahnen der $\mathbb{C}^*$ -Wirkung und den isolierten Fixpunkten. Wegen der lokalen Linearisierbarkeit der $\mathbb{C}^*$ -Wirkung an den Fixpunkten (vgl. Satz von Cartan in [B,T]) folgt, daß die Fixpunktkurven glatt sind. Die induzierte S^1 -Wirkung auf X liefert die gleiche

Fixpunktmenge X^{fix} , wie die $\mathbb{C}^*$ - Wirkung. Somit gilt für die topologische Eulercharakteristik von X :

$$\chi_{top}(X) = c_2(X) = b_2(X) = \chi_{top}(X^{fix}) \quad [Br].$$

Dabei besteht X^{fix} aus den disjunkten glatten Fixpunktkurven und den isolierten Fixpunkten.

Dann bezeichne k die Anzahl der glatten rationalen Fixpunktkurven und r die Anzahl aller isolierter Fixpunkte. Mögliche Tori unter den Fixpunktkurven liefern keinen Beitrag zur Eulercharakteristik. Glatte Kurven höheren Geschlechtes gibt es in X nicht [N 2]. Dann gilt: $b_2(X) = r + 2k$ mit $r \geq 0$.

Allgemein ist für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X mit $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$ die χ_y - Charakteristik definiert [Ko]:

Die q -te Kohomologiegruppe mit Werten in der Garbe der Keime der holomorphen p -Formen ist ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum der Dimension $h^{p,q}(X)$. Definiere:

$$\chi^p(X) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \cdot h^{p,q}(X)$$

und

$$\chi_y(X) := \sum_{p=0}^n \chi^p(X) \cdot y^p$$

für eine Unbestimmte y .

Das Vektorfeld Θ ist ein kompaktes Vektorfeld auf der Fläche X , d.h. es stabilisiert wegen der induzierten S^1 - Wirkung eine hermitesche Metrik

auf X , und somit gilt mit Theorem 3 aus [Ko] für die Komponenten X_i der Nullstellenmenge des Vektorfeldes:

$$\chi_y(X) = \sum_i (-y)^{S(i)} \cdot \chi_y(X_i)$$

mit ganzen Zahlen $S(i)$, die sich aus den Eigenwerten der induzierten linearen Darstellung im holomorphen Tangentialraum der Fixpunkte ergeben.

Insbesondere gilt mit $y = 1$ für die Signatur von X :

$$Sign(X) = \chi_1(X) = \sum_i (-1)^{S(i)} \cdot Sign(X_i).$$

Für die kompakte komplexe Fläche X aus Klasse VII_0 gilt mit $b_2^+(X) = 0$:

$$Sign(X) = b_2^+(X) - b_2^-(X) = -b_2^-(X),$$

d.h. die Signatur ist gleich dem Index [At,Si].

Für eine kompakte Riemannsche Flächen Y gilt: $\chi_1(Y) = 0$.

Und für isolierte Punkte x_j gilt natürlich: $\chi_1(x_j) = 1$.

Aber nun gilt wegen $b_2(X) = b_2^+(X) + b_2^-(X) = b_2^-(X)$:

$$Sign(X) = \chi_1(X) = \sum_{i=1}^r (-1)^{S(i)} = -b_2(X),$$

und somit

$$0 \leq r + 2k = |b_2(X)| \leq r,$$

d.h. es existieren keine glatten rationalen Fixpunktkurven.

Nun gibt es eine glatte elliptische Kurve E^{fix} und X ist eine Hopf-Fläche oder eine parabolische Inoue-Fläche [N 2; S.439].

Hopf-Flächen der algebraischen Dimension $a(X) = 0$ besitzen eine abelsche Fundamentalgruppe [K 2;II;Theorem 32]. Sie sind somit schon fast-homogen [H,O 1].

Jetzt untersuchen wir noch den Fall einer parabolischen Inoue-Fläche X : Die Fläche X entsteht durch Kompaktifizierung eines komplexen Geradenbündels über dem Torus E mit dem Zykel Z [E]. Die nicht-abgeschlossenen Bahnen der $\mathbb{C}^*$ -Wirkung, die das Vektorfeld Θ liefert, können nur an E und Z kompaktifiziert werden, da sie in $X \setminus Z$ lokal abgeschlossen sind.

Nun ist E die Fixpunktkurve für das eineindeutige holomorphe Vektorfeld Θ auf X . Die singulären Punkte von Z sind genau die isolierten Fixpunkte von Θ . Somit besteht nach Proposition 9.4. der topologische Abschluß $T(x_0)$ einer nicht-abgeschlossenen $\mathbb{C}^*$ -Bahn von $x_0 \in X$ aus der Bahn $\mathbb{C}^*(x_0)$ und aus endlich vielen Fixpunkten. Damit wäre $T(x_0)$ nach dem Satz von Remmert-Stein eine analytische Kurve in X .

Somit hätte man für ein $\mathbb{C}^*$ -Vektorfeld Θ unendlich viele Kurven in X .

□

Man hat im obigen Beweis gesehen, daß z.B. eine parabolische Inoue-Fläche aus Klasse VII_0 ein holomorphes Vektorfeld mit Nullstellen besitzt, das nicht durch eine holomorphe $\mathbb{C}^*$ -Wirkung induziert wird.

Literaturverzeichnis

- [A,S] ANCONA,V.;SILVA,A.: Numerically effective bundles on Mois-
ezon and strongly pseudoconvex manifolds, Seminar on Deformations,
Proceedings, Łódź-Warsaw, Lecture Notes in Mathematics 1165, Springer-Verlag Berlin 1985
- [At,Si] ATIYAH,M.F.;SINGER,I.: The Index of elliptic operators III,
Ann. Math. 87 (1968), S. 546-604
- [B,P,V] BARTH,W.;PETERS,C.;VAN DE VEN,A.: Compact complex
surfaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,
Springer Verlag 1984
- [B,T] BEHNKE,H.;THULLEN,P.: Theorie der Funktionen mehrerer
komplexer Veränderlicher, Ergebnisse der Math., Band 3, S. 83-
93, Springer Verlag 1935
- [Bo] BOGOMOLOV,F.A.: Classification of surfaces of class VII_0
with $b_2 = 0$, Math. USSR Isv. 10 (1976), S. 255-269; Surfa-
ces of class VII_0 and affine geometry, Math. USSR Isv. 21
(1983), S. 31-73
- [B] BOREL,A.: Symmetric compact complex spaces, Arch. Math.
33 (1979), S. 49-56
- [Br] BREDON,G.E.: Introduction to compact transformation groups,
New York London : Academic Press 1972
- [C,H,K] CARRELL,J.;HOWARD,A.;KOSNIOWSKI,C.: Holomorphic
vector fields on complex surfaces, Math. Ann. 204 (1973), S.
73-81
- [C,S] CARRELL,J.;SOMMESE,J.: Almost homogeneous C^* - actions
on compact complex surfaces, Proceedings, Vancouver 1981,
Group Actions and Vector Fields, Lecture Notes in Mathematics
956, Springer-Verlag 1982
- [E] ENOKI,I.: Surfaces of class VII_0 with curves, Tohoku Math. J.
33 (1981), S. 453-492

- [F] FUJIKI, A.: On automorphism groups of compact Kähler manifolds, *Inventiones math.* 44 (1978), S. 225-258
- [G,R] GRAUERT, H.; RIEMENSCHNEIDER, O.: Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, *Inventiones math.* 11 (1970), S. 263-292
- [G,H] GRIFFITHS, P. H.; HARRIS, J.: Principles of algebraic geometry, New York, J. Wiley (1978)
- [Hi] HIRONAKA, H.: Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic space, England 1971, Math. Inst. Warwick Univ.
- [Ho] HOLMANN, H.: Seifertsche Faserräume, *Math. Ann.* 157 (1964), S. 138-166
- [H,O 1] HUCKLEBERRY, A. T.; OELJEKLAUS, E.: Classification theorems for almost homogeneous spaces, *Revue de l'Institut Elie Cartan*, Janvier 1984
- [H,O 2] HUCKLEBERRY, A. T.; OELJEKLAUS, E.: Homogeneous spaces from a complex analytic viewpoint, *Manifolds and Lie groups, Papers in honor of Y. Matsushima, Progress in Math.*, Birkhäuser, Boston (1981)
- [H,O 3] HUCKLEBERRY, A. T.; OELJEKLAUS, E.: A characterization of complex homogeneous cones, *Math. Z.* 170 (1980), S. 181-194
- [I] INOUE, M.: On surfaces of class VII_0 , *Inventiones math.* 24 (1974), S. 269-310
- [K,O] KOBAYASHI, S.; OCHIAI, T.: Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics, *Journ. Math. Kyoto Univ.* 13 (1973), S. 31-47
- [K 1] KODAIRA, K.: On compact complex analytic surfaces I, *Ann. Math.* 71 (1960), S. 111-152; II, *Ann. Math.* 77 (1963), S. 563-626; III, *Ann. Math.* 78 (1963), S. 1-40
- [K 2] KODAIRA, K.: On the structure of compact complex analytic surfaces I, *Ann. J. Math.* 86 (1964), S. 751-798 ; II, *Ann. J. Math.* 88 (1966), S. 682-721; III, *Ann. J. Math.* 90 (1969), S. 55-83; IV, *Ann. J. Math.* 90 (1969), S. 1048-1066

- [K 3] KODAIRA,K.: Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, Journ. of Diff. Geom. 6 (1971), S. 33-46
- [Ko] KOSNIOWSKI,C.: Applications of the holomorphic Lefschetz formula, Bull. Lond. Math. Soc. 2 (1970), S. 43-48
- [M] MASSMANN,B.: Äquivariante Kählersche Kompaktifizierungen von drei-dimensionalen auflösbaren komplexen Mannigfaltigkeiten, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum
- [N 1] NAKAMURA,I.: Complex parallelisable manifolds and their small deformations, Journ. of Diff. Geom. 10 (1975), S. 85-112
- [N 2] NAKAMURA,I.: On surfaces of class VII_0 with curves, Invent. math. 78 (1984), S. 393-443
- [O 1] OELJEKLAUS,E.: Über fast-homogene kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, Schriftenr. Math. Inst. Univ. Münster, 2. Serie, Band 1 (1970)
- [O 2] OELJEKLAUS,E.: Fast-homogene Kählermannigfaltigkeiten mit verschwindender erster Bettizahl, Manusk. Math. 7 (1972), S. 175-183
- [P,S] PETERNELL,TH.;SCHNEIDER,M.: Compactifications of $\mathbb{C}^3$.I, Math. Ann. 280 (1988), S. 129-146
- [Po] POTTERS,J.: On almost homogeneous compact complex analytic surfaces, Invent. math. 8 (1969), S. 244-266
- [R,V] REMMERT,R.;VAN DE VEN,A.: Zwei Sätze über die komplex-projektive Ebene, Nieuw. Arch. Wisk. (3), 8 (1960), S. 147-157
- [R] RIEMENSCHNEIDER,O.: A generalization of Kodaira's embedding theorem, Math. Ann. 200 (1973), S. 99-102
- [U] UENO,K.: Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Mathematics 439, Springer-Verlag Berlin 1975

Lebenslauf

Ich wurde am 13.2.1962 als zweites Kind der Bankkauffrau Erna Gellhaus, geb. Kruschewski, und des Lehrers Gerhard Gellhaus, in Bochum-Langendreer geboren. Mein Vater verstarb am 3.11.1976.

Nach Grundschule und Besuch des Lessing-Gymnasiums in Bochum-Langendreer erhielt ich 1981 die allgemeine Hochschulreife.

Zum Wintersemester 1981/82 immatrikulierte ich mich an der Ruhr-Universität Bochum im Studiengang Mathematik und Physik für das Lehramt der Sekundarstufe II/I. Im Sommer 1982 nahm ich dann noch den Diplomstudiengang Mathematik mit Nebenfach Physik hinzu.

Nach meinem Vordiplom in Mathematik im Frühjahr 1983 wurde mein Interesse durch die Mitarbeit an dem von Herrn Prof. Dr. Alan T. Huckleberry in Bochum aufgebauten Arbeitsbereich "Komplex homogene Räume, komplexe Mannigfaltigkeiten und Liegruppen" auf entsprechende Fragestellungen gerichtet.

Die Diplomhauptprüfung im Fach Mathematik legte ich im Februar 1985 ab. Das Thema der Diplomarbeit war das Studium der kompakten komplexen Flächen in Bezug auf deren Klassifikation und die Konstruktion von Flächen in Klasse VII_0 .

Im November 1985 wurde ich als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät für Mathematik angestellt. Bis zu diesem Zeitpunkt war ich dort als Wissenschaftliche Hilfskraft beschäftigt. Durch meine Tätigkeit an der Fakultät für Mathematik konnte ich vielfältige Erfahrungen im Bereich der Lehre sammeln, besonders in der angewandten Numerischen Mathematik und der Theoretischen Informatik.

Der Schwerpunkt meines Interesses im Nebenfach Physik lag auf der Theoretischen Physik. Im April 1986 nahm ich an der "Spring School on Supergravity and Supersymmetry" am International Centre for Theoretical Physics in Triest teil.

